του Δ" και συμβολίζεται με $\delta(\Delta)$

Έτσι, $\delta(\Delta) = \{ \mathcal{C} : \mathcal{C}$ κλάσης Dynkin στο X, $\Delta \subset \mathcal{C} \}$

Εφόσον κάθε σ-άλγεβρα είναι κλάση Dynkin, προκύπτει $\delta(\Delta) \subset \sigma(\Delta)$ για κάθε Δ.

Προσοχή: Αν η κλάση Dynkin είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές (ή ενώσεις) τότε θα είναι σ-Άλγεβρα

ΘΕΩΡΗΜΑ (Κατασκευαστική απόδειξη)

Έστω Δ οικογένεια υποσυνόλων του X κλειστή στις πεπερασμένες τομές. Τότε, $\sigma(\Delta) = \delta(\Delta)$

Απόδειξη

Γενικά $\delta(\Delta) \subset \sigma(\Delta)$, $\forall \Delta$.

Μένει νδο $\sigma(\Delta) \subset \delta(\Delta)$

Για κάθε $P \subset \sigma(\Delta)$ θέτουμε

$\tilde{P} = \{ A \subset X : A \cap C \in \delta(\Delta),\ \forall C \in P \}$.

Η $\tilde{P}$ είναι πάντα κλάση Dynkin, διότι:

- $\forall C \in P$: $X \cap C = C \in P \subset \delta(\Delta)$
- $\forall A, B \in P$: $A \subset B$ τότε $\forall C \in P$: $A \cap C \in \delta(\Delta)$ & $B \cap C \in \delta(\Delta) \xRightarrow{\Delta \text{ Dynkin}} (B \cap C) - (A \cap C) \in \delta(\Delta) \Leftrightarrow (B - A) \cap C \in \delta(\Delta)$

  Άρα, $B \setminus A \in \tilde{P}$
- Έστω $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\uparrow$ ακολουθία εν $\tilde{P}$

  Τότε $\forall C \in P$: $(A_n) \cap C \in \delta(\Delta)$ και $(A_n \cap C)$ αύξουσα $(\uparrow)$

  Άρα, $\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap C) \in \delta(\Delta) \Rightarrow \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cap C \in \delta(\Delta)$

Από την υπόθεση αν A & C εν $\Delta \Rightarrow A \cap C \in \Delta \subset \delta(\Delta)$

Άρα, $\Delta \subset \tilde{\Delta}$

Εφόσον η $\tilde{\Delta}$ είναι κλάση Dynkin έπεται ότι $\delta(\Delta) \subset \tilde{\Delta}$

Έτσι, αν $A \in \delta(\Delta)$ και $C \in \Delta$ τότε $A \cap C \in \delta(\Delta)$

Άρα, $\Delta \subset \widetilde{\delta(\Delta)}$.

Αφού η $\widetilde{\delta(\Delta)}$ είναι κλάση Dynkin τότε $\delta(\Delta) \subset \widetilde{\delta(\Delta)}$

Εντέλει, αν $A \in \delta(\Delta)$ και $C \in \delta(\Delta)$ τότε $A \cap C \in \delta(\Delta)$

Επομένως, $\delta(\Delta)$ κλειστή στις πεπερ. τομές και άρα η $\delta(\Delta)$ είναι σ-άλγεβρα. Άρα, $\sigma(\Delta) \subset \delta(\Delta)$.

Παρατήρηση:

Το συμπέρασμα προηγούμενης πρότασης μπορεί να γραφεί ως εξής:

$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \delta(\mathcal{F}) = \delta(\Delta_1) = \delta(\Delta_2) = \delta(\Delta_3)$ αφού, οι $\mathcal{F}$, Δ_1, $\Delta_1 \cup \{\emptyset\}$, $\Delta_3 \cup \{\emptyset\}$ είναι κλειστές οικογένειες ως προς τις πεπερ. τομές καθώς επίσης $\delta(\Delta_i) = \delta(\Delta_i \cup \{\emptyset\})$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο:

Ορισμός:

Έστω X ένα σύνολο και $\mathcal{A}$ μία σ-άλγεβρα στο X. Μία (συνολο-)συνάρτηση $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty)$ λέγεται (αριθμήσιμα προσθετικό) μέτρο αν

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) Για κάθε ακολουθία $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ξένων ανά δύο συνόλων στην $\mathcal{A}$ να είναι: $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Η ii λέγεται αριθμήσιμη προσθετικότητα.

Λέμε ότι το μ είναι μέτρο στο $(X, \mathcal{A})$ ή στο X αν εννοείται η $\mathcal{A}$.

Ορισμός

Το ζεύγος (διατεταγμένο) $(X, \mathcal{A})$ λέγεται μετρήσιμος χώρος και η τριάδα $(X, \mathcal{A}, \mu)$ λέγεται χώρος μέτρου

Ορισμός

Αν $\mathcal{A}$ άλγεβρα στο X και $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty)$ ώστε $\mu(\emptyset) = 0$ και $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$ για κάθε πεπερασμένη ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων, τότε το μ λέγεται πεπερασμένα προσθετικό μέτρο

Σχόλιο

Κάθε μέτρο είναι πεπερασμένα προσθετικό μέτρο

Παραδείγματα:

Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος

1) Για κάθε $A \in \mathcal{A}$ θέτουμε $\mu(A) = \begin{cases} n, & \text{card}A = n \\ +\infty, & \text{card}A = +\infty \end{cases}$

όπου προφανώς είναι μέτρο. Επίσης, θέτουμε

$V(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset \\ +\infty, & A \neq \emptyset \end{cases}$ όπου επίσης είναι μέτρο.

Το μ λέγεται <u>αριθμητικό</u> μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$

2) Έστω $x \in X$ και για κάθε $A \in \mathcal{A}$, θέτουμε

$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$ το δ_x είναι μέτρο (προφανές) και λέγεται μέτρο Dirac στο x.

Παρατήρηση:

Αν μ, v μέτρα στον (X, A) τότε $\mu + v$ μέτρο και το $\alpha\mu$, $\alpha \geq 0$ μέτρο στο (X, A)

Τα μέτρα αυτά τα ορίζουμε ως:

$(\mu + v)(A) = \mu(A) + v(A)$ και $(\alpha \cdot \mu)(A) = \alpha\mu(A)$.

3) Αν μ μέτρο στο $(X, \mathcal{A})$ και $B \in \mathcal{A}$ τότε η (συνολο-) συνάρτηση $V(A) = \mu(A \cap B)$ $\forall A \in \mathcal{A}$ είναι μέτρο

Πρόταση:

Έστω X χώρος μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και ας είναι $A, B \in \mathcal{A}$ με $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ (Αύξουσα συνάρτηση)

Αν επιπλέον, $\mu(A) < \infty$ τότε $\mu(A \setminus B) = \mu(B) - \mu(A)$

<u>Απόδειξη</u>

$B = A \cup (B - A)$ με $A \cap (B - A) = \emptyset$

Τότε από το (ii) του ορισμού του μέτρου

$\mu(B) = \mu(A) + \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{\geq 0} \geq \mu(A)$

Αν $\mu(A)<\infty$ τότε $\mu(B)-\mu(A)=\mu(B\setminus A)$.

Εάν $\mu(A)=+\infty \Rightarrow \mu(B)=+\infty$ ενώ $\mu(B\setminus A)=\infty$ ή $\alpha\in\mathbb{R}^+$.

Π.χ

$(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\mu)$ όπου μ: αριθμητικό μέτρο (Πχ 1).
Αν $A=\{2n: n\in\mathbb{N}\}$ και $A_n:=\{i\in\mathbb{N} : i\geq n+1\}$
$A, A_n\subset\mathbb{N}$, $\mu(A)=+\infty$, $\mu(A_n)=+\infty$, $\mu(\mathbb{N}\setminus A)=\mu(\{2n+1: n\in\mathbb{N}\})=$
$=\infty$, $\mu(\mathbb{N}\setminus A_n)=n$.

Πρόταση (Αριθμήσιμη Υποπροσθετικότητα του μέτρου)

Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου.
Αν $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία εν $\mathcal{A}$, τότε
$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$.

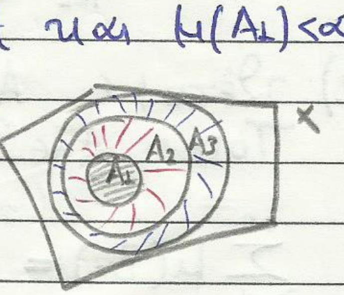
Απόδειξη

Θέτουμε $B_1:=A_1$ και $B_n:=A_n\setminus\left(\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i\right)$, $n=2,3,\dots$
Τα $B_n\in\mathcal{A}$, $\forall n=1,2,\dots$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ξένα ανά δύο.
$B_n\subset A_n$, $\forall n=1,2,\dots$ και $\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{A}$
Άρα, $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(B_n)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$

Πρόταση

Έστω $(X,\mathcal{A})$ χώρος μέτρου
i) Αν $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αύξουσα ακολουθία στην $\mathcal{A}$
τότε $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\lim_n\mu(A_n)$
ii) Αν $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φθίνουσα ακολουθία στην $\mathcal{A}$ και $\mu(A_1)<\infty$
τότε $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\lim_n\mu(A_n)$

Απόδειξη

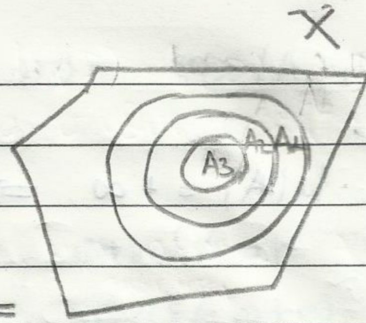


i) Θέτουμε $B_1=A_1$ & $B_n=A_n\setminus A_{n-1}$, $n\geq2$
$B_n\in\mathcal{A}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ξένα ανά δύο
$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$ και $\bigcup_{k=1}^{n}B_k=A_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$
Άρα, $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(B_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mu(B_n)=$
$=\lim_n\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n}B_k\right)=\lim_n\mu(A_n)$

ii) Θέτοντας $C_n = A_1 \setminus A_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$

έχουμε $C_n \in \mathcal{A}$ $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \uparrow$ και

$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = A_1 \setminus \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$. Από το (i)



$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \lim_n \mu(C_n) \Leftrightarrow \mu\left(A_1 \setminus \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right) =$$

$$= \lim_n \mu(A_1 \setminus A_n) \Leftrightarrow \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_n \left(\mu(A_1) - \mu(A_n)\right) \Leftrightarrow$$

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_n \mu(A_n)$$

Δεν ισχύει το συμπέρασμα του ii αν $\mu(A_1) = \infty$

αφού για $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ μ: αριθμητικό μέτρο

θέτουμε $A_n = \{i \in \mathbb{N} : i \geq n\}$ όπου $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ αλλά $\lim_n \mu(A_n) = \infty$

φθίνουσα

Πρόταση:

Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και μ πεπερασμένα προσθετικό μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$:

i) Αν $\forall (A_n)$ αύξουσα στην $\mathcal{A}$ ισχύει:
$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_n \mu(A_n)$ τότε το μ είναι μέτρο

ii) Αν $\forall (A_n)$ φθίνουσα στην $\mathcal{A}$ ισχύει $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset\right)$
$\lim \mu(A_n) = 0$ τότε το μ είναι μέτρο

Απόδειξη

Θεωρούμε $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ξένα ανά δύο σύνολα στο $\mathcal{A}$

Θδο $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$

i) Θέτουμε $A_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Τότε $A_n \in \mathcal{A}$, (A_n) αύξουσα, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \lim_n \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) \overset{\text{υποθ}}{=\!=} \lim_n \sum_{k=1}^{n} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) =$$

$$= \lim_n \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)$$

ii) Θέτουμε $A_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k$, $(A_n)_{\in \mathcal{A}}$ φθίνουσα, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overset{A_n}{\overset{\shortparallel}{B_n}}\Big) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n-1} B_k \cup A_n\Big) \overset{\text{υποθ}}{=\!=} \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n-1} B_k\Big) + \mu(A_n) \overset{\text{υπαρ}}{=}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \mu(B_k) + \mu(A_n) \Rightarrow \lim_n \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = 0$$

Ορισμός: Έστω (X, A, μ) χώρος μέτρου:
Ένα μέτρο λέγεται πεπερασμένο αν $\mu(X) < +\infty$
Ένα μετρο λέγεται μέτρο πιθανότητας αν $\mu(X) = 1$
Ένα μετρο λέγεται σ-πεπερασμένο αν $\exists (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ εν $\mathcal{A}$ με $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ και $\mu(X_n) < +\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$
Αντίστοιχα σε κάθενα ορισμό αλλάζει και η ονομασία του $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρου

Παρατήρηση:
Αν μ πεπερασμένο τότε $\mu(A) \leq \mu(X) < +\infty$, $\forall A \in \mathcal{A}$.
$\mu: \mathcal{A} \to [0, \mu(X)]$ (λόγω της μονοτονίας)
Αν μ μέτρο πιθανότητας τότε $\mu: \mathcal{A} \to [0, 1]$
Αν μ σ-πεπερασμένο τότε κάθε $A \in \mathcal{A}$ έχει σ-πεπερασμένο μέτρο, δηλ. $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ με $\mu(A_n) < +\infty$
(πχ $A_n = X \cap A_n$)

Αν μ μετρο πιθανότητας $\Rightarrow$ μ πεπερασμενο $\Rightarrow$ μ σ-πεπερασμ.
Αλλά $\not\Leftarrow$ σε καμία απο τις δύο περιπτωσεις
πχ1 $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ μ: αριθμ. μέτρο
$\mathbb{N} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{n\}$
πχ2
$X \neq \emptyset$ και $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ το μέτρο

$$V(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset \\ +\infty, & A \neq \emptyset \end{cases} \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

δεν είναι σ-πεπερασμένο

π.χ 3

Το διπλάσιο ενός μέτρου πιθανότητας είναι πεπερασμένο ,αλλά όχι μέτρο πιθανότητας.

Πρόταση
Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χωρος, Δ οικογένεια $\subset X$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} B_k \cup A_n\right) \overset{\text{Υποθ.}}{=\!=} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} B_k\right) + \mu(A_n) \overset{\text{Υποθ}}{=}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \mu(B_k) + \mu(A_n) \Rightarrow \lim_n \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \overset{\text{Υποθ}}{=} 0$$

Ορισμός: Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου:

Ένα μέτρο λέγεται πεπερασμένο αν $\mu(X) < +\infty$

Ένα μέτρο λέγεται μέτρο πιθανότητας αν $\mu(X) = 1$

Ένα μέτρο λέγεται σ-πεπερασμένο αν $\exists (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ εν $\mathcal{A}$ με $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ και $\mu(X_n) < +\infty$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Αντίστοιχα σε κάθε ένα ορισμό αλλάζει και η ονομασία του $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρου

Παρατήρηση:

Αν μ πεπερασμένο τότε $\mu(A) \leq \mu(X) < +\infty$, $\forall A\in\mathcal{A}$.

$\mu: \mathcal{A} \to [0, \mu(X)]$ (λόγω της μονοτονίας)

Αν μ μέτρο πιθανότητας τότε $\mu: \mathcal{A} \to [0,1]$

Αν μ σ-πεπερασμένο τότε κάθε $A\in\mathcal{A}$ έχει σ-πεπερασμένο μέτρο, δηλ. $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ με $\mu(A_n) < +\infty$

(πχ $A_n = X \cap A_n$)

Αν μ μέτρο πιθανότητας $\Rightarrow$ μ πεπερασμένο $\Rightarrow$ μ σ-πεπερασμ.

Αλλά $\not\Leftarrow$ σε καμία από τις δύο περιπτώσεις

πχ1 $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ μ: αριθμ. μέτρο

$\mathbb{N} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{n\}$

πχ2

$X \neq \emptyset$ και $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ το μέτρο

$$V(A) = \begin{cases} 0 & , A = \emptyset \\ +\infty & , A \neq \emptyset \end{cases} \quad \forall A\in\mathcal{A}$$

δεν είναι σ-πεπερασμένο

Πρόταση

Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος, Δ οικογένεια $\subset X$ κλειστή ως προς τις πεπερ. τομές ώστε $\sigma(\Delta) = \mathcal{A}$

και μ, ν μέτρα στον $(X, \mathcal{A})$ ε/ω $\mu(D) = \nu(D), \forall D \in \Delta$
Αν ισχύει μία απο τις δύο παρακάτω συνθήκες τότε $\mu = \nu$
i) $\mu(X) = \nu(X) < \infty$
ii) $\exists (D_n)_{n\in\mathbb{N}} \uparrow$ εν Δ : $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = X$ & μ, ν πεπερ. και ίσα $\forall n \in \mathbb{N}$

Απόδειξη
i) Εστω $\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = \nu(A)\}$
Η $\mathcal{D}$ κλάση Dynkin
• $X \in \mathcal{D}$ (υποθ. (i))
• A, B $(A \subset B)$ εν $\mathcal{D}$ τότε $\mu(B \setminus A) \overset{\mu<\infty}{=} \mu(B) - \mu(A) = \nu(B) - \nu(A) \overset{\nu<\infty}{=} \nu(B\setminus A)$.
• $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ εν $\mathcal{D}$, αύξουσα. Νδο $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$
τότε $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_n \mu(A_n) = \lim_n \nu(A_n) = \nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$
Άρα, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$
Επίσης από την Υπόθεση $\Delta \subset \mathcal{D}$
Άρα, $\delta(\Delta) \subset \mathcal{D}$, διότι $\mathcal{D}$ κλάση Dynkin
Εφόσον, Δ κλειστή στις πεπερασμένες τομές
έπεται ότι $\delta(\Delta) = \sigma(\Delta)$
Άρα, $\mathcal{A} = \delta(\Delta) = \sigma(\Delta) \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{D} \Rightarrow \mu = \nu$

ii) Θέτουμε $\left.\begin{array}{l} \mu_n(A) = \mu(A \cap D_n) \\ \nu_n(A) = \nu(A \cap D_n) \end{array}\right\} \forall n \in \mathbb{N}, A \in \mathcal{A}$
τα οποία είναι μέτρα
Για κάθε $D \in \Delta$, $\mu_n(D) = \mu(D \cap D_n) \overset{\text{υποθ.}}{=} \nu(D \cap D_n) = \nu_n(D)$
$\mu_n(X) = \mu_n(D_n) = \nu(D_n) = \nu_n(X) < +\infty$.
Άρα, από το i συμπεραίνουμε $\mu_n = \nu_n, \forall n \in \mathbb{N}$
Για κάθε $A \in \mathcal{A}$:
$\mu(A) \overset{\text{Προτ. συνέχ.}}{=} \lim_n \mu(A \cap D_n) = \lim_n \mu_n(A) = \lim_n \nu_n(A) =$
$= \lim_n \nu(A \cap D_n) = \nu(A)$

Εφαρμογή:
Εστω μ, ν δύο πεπερ. μέτρα στον χώρο $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ετσι ώστε $\mu((-\infty, \beta]) = \nu((-\infty, \beta])\ \forall \beta$, τότε $\mu = \nu$.
Απάντηση
Εξετάζω αν εφαρμόζεται η προηγούμενη πρόταση

Έστω $\Delta = \{(-\infty, \beta] : \beta \in \mathbb{R}\}$

$\sigma(\Delta) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, Δ κλειστό στις πεπερ. τομές, $\mu(A) = \nu(A), \forall A \in \Delta$

Οδο ισχύει το ΰ.

$\mu(\mathbb{R}) = \lim_n \mu((-\infty, n]) = \lim_n \nu((-\infty, n]) = \nu(\mathbb{R}) < \infty$ διότι τα μ, ν πεπερασμένα.